

ΜΑΘΗΜΑ 10

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Απαραίτητες γνώσεις προηγούμενων τάξεων

Θεωρία - Σχόλια - Μέθοδοι - Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ιδιότητες

- $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$
- $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$

Προσοχή στο λάθος : $\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$, ισχύει μόνο για $\alpha \neq 0$

Το σωστό είναι :

$$\begin{aligned} \alpha\beta = \alpha\gamma &\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0 \\ &\alpha(\beta - \gamma) = 0 \\ &\alpha = 0 \text{ ή } \beta - \gamma = 0 \\ &\alpha = 0 \text{ ή } \beta = \gamma \end{aligned}$$

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$

2.

Ταυτότητες

- $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^3)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

3.

Ιδιότητες

- $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ και γενικότερα $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^v = \beta^v$

Προσοχή, το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν οι α, β είναι θετικοί.

- Αν α, β θετικοί τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^v = \beta^v$
- $\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta$

4.

Ανισότητες:

- Προσθέτω κατά μέλη ομοιόστροφες ανισότητες
- Πολλαπλασιάζω κατά μέλη ομοιόστροφες ανισότητες, **εφ'όσον έχουν μέλη θετικά**
- Δεν αφαιρώ ούτε διαιρώ ανισότητες κατά μέλη.
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^v < \beta^v$, **εφόσον α, β θετικοί.**

5.

Απόλυτες τιμές

- Μια για πάντα, ξέχνα ότι απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς πρόσημο.
- **Ορισμός :**

$$\begin{array}{l} \text{όταν } \alpha \geq 0, \text{ τότε } |\alpha| = \alpha \\ \text{όταν } \alpha < 0, \text{ τότε } |\alpha| = -\alpha \end{array}, \quad \text{ή} \quad |\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{όταν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{όταν } \alpha < 0 \end{cases}$$
- Ο αριθμός $|\alpha|$ είναι πάντα ≥ 0 , ενώ ο α μπορεί να μπορεί όχι.
- $|\alpha| = |- \alpha|$ και $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$
- $x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow |x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$
και όχι $x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \alpha$
- Για $\theta > 0$: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- $x^2 \leq \alpha^2 \Leftrightarrow |x| \leq |\alpha| \Leftrightarrow -|\alpha| \leq x \leq |\alpha|$.
- Για $\theta > 0$: $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } \theta \leq x$
- $x^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow |x| \geq |\alpha| \Leftrightarrow x \leq -|\alpha| \text{ ή } x \geq |\alpha|$
- $|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

6.

Τετραγωνικές ή ν-οστές ρίζες

- Άλλο τετραγωνική ή ν-οστή ρίζα αριθμού και άλλο ρίζα εξίσωσης. Είναι δύο εντελώς διαφορετικές έννοιες.

ν-οστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α λέγεται ο αριθμός $\sqrt[n]{\alpha}$, που όταν υψωθεί στη n δίνει α .

Ρίζα εξίσωσης λέγεται κάθε αριθμός, που την επαληθεύει.

- Τις υπόριζες ποσότητες τις υποχρεώνουμε να είναι ≥ 0
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, $(\sqrt{\alpha^2}) = \alpha$. μόνο όταν $\alpha \geq 0$)

7.

Πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Το τριώνυμο είναι **ετερόσημο** του a , όταν ο x βρίσκεται μεταξύ των ριζών.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του a , ενώ μηδενίζεται όταν $x =$ ρίζα του τριωνύμου.

8.

Για να λύσω β-βάθμια ανίσωση

- α) Θεωρώ το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$
- β) Βρίσκω τη διακρίνουσα
- γ) Βρίσκω τις ρίζες (εφ'όσον βέβαια υπάρχουν)
- δ) Γράφω τον πίνακα μεταβολών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $\lambda x = 5\lambda$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $\frac{\lambda x}{\lambda} = \frac{5\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow x = 5$
- Όταν $\lambda = 0$, η εξίσωση γίνεται $0x = 5 \cdot 0 \Leftrightarrow 0x = 0$ αόριστη, αφού επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $(\lambda - 2)x = 3\lambda + 1$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda - 2 = 0$ δηλαδή όταν $\lambda = 2$,
η εξίσωση γίνεται $0x = 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 0x = 7$ αδύνατη
- Όταν $\lambda - 2 \neq 0$ δηλαδή όταν $\lambda \neq 2$,
η εξίσωση γίνεται $x = \frac{3\lambda + 1}{\lambda - 2}$.

λ παράμετρος
Παραμετρική
εξίσωση

3.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(3\lambda + 2)$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda - 1 \neq 0$ δηλαδή όταν $\lambda \neq 1$,
η εξίσωση γίνεται $x = 3\lambda + 2$,
έχει μοναδική ρίζα την $3\lambda + 2$
- Όταν $\lambda - 1 = 0$ δηλαδή όταν $\lambda = 1$,
η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 0$, αόριστη
με άπειρες ρίζες, όλους τους πραγματικούς αριθμούς

λ παράμετρος
Παραμετρική
εξίσωση

4.

Χρησιμοποιώντας ταυτότητες να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$(x+1)^3 =$$

$$(x-1)^3 =$$

$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 1 =$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 =$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 =$$

Απάντηση

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2$$

Ρίξε μια ματιά στις
ταυτότητες

5.

Συμπλήρωσε τις ισότητες $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 =$

$$\alpha = -3 \Rightarrow \alpha^2 =$$

$$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha =$$

$$\alpha^3 = 8 \Rightarrow \alpha =$$

$$\alpha^3 = -8 \Rightarrow \alpha =$$

Απάντηση

9, 9, 3 ή -3, 2, -2

6.

Να μετατραπεί σε πολλαπλού τύπου η συνάρτηση $f(x) = |2x - 6|$, $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $2x - 6 \geq 0$, δηλαδή όταν $2x \geq 6$, δηλ. $x \geq 3$
τότε $|2x - 6| = 2x - 6$. Άρα $f(x) = 2x - 6$
- Όταν $2x - 6 < 0$ δηλ..... $x < 3$
τότε $|2x - 6| = -(2x - 6)$. Άρα $f(x) = -2x + 6$

Επανάλαβε τον ορισμό της απόλυτης τιμής

Τελικά $f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{όταν } x \geq 3 \\ -2x + 6, & \text{όταν } x < 3 \end{cases}$

7.

Να μετατραπεί σε πολλαπλού τύπου η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{|x^2-1|}$, $x \neq \pm 1$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $x^2 - 1 > 0$, δηλαδή όταν $x^2 > 1$

$$|x| > 1$$

$$x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$$

τότε $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, άρα $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

- Όταν $x^2 - 1 < 0$, δηλαδή όταν $x^2 < 1$

$$|x| > 1$$

$$-1 < x < 1$$

τότε $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$, άρα $f(x) = \frac{x-1}{-(x^2-1)} = \frac{x-1}{-(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$

Τελικά $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{όταν } x < -1 \text{ ή } x > 1 \\ -\frac{1}{x+1}, & \text{όταν } -1 < x < 1 \end{cases}$

Επανάλαβε τον ορισμό της απόλυτης τιμής

8.

Να λυθεί η εξίσωση $|x-1|=3$ και η ανίσωση $|x-1|\leq 3$.

Προτεινόμενη λύση

$$|x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=3 \text{ ή } x-1=-3$$

$$x=3+1 \text{ ή } x=-3+1$$

$$x=4 \text{ ή } x=-2$$

$$|x-1|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-1\leq 3$$

$$-3+1\leq x-1+1\leq 3+1$$

$$-2\leq x\leq 4$$

$$|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$$

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

9.

Να λυθεί η εξίσωση $x^2=5$ και η ανίσωση $x^2>5$.

Προτεινόμενη λύση

$$x^2=5 \Leftrightarrow x^2=\sqrt{5}^2$$

$$|x|=\sqrt{5}$$

$$x=\sqrt{5} \text{ ή } x=-\sqrt{5}$$

$$x^2>5 \Leftrightarrow x^2>\sqrt{5}^2$$

$$|x|>\sqrt{5}$$

$$x<-\sqrt{5} \text{ ή } x>\sqrt{5}$$

10.

Να λυθεί η εξίσωση $|-2x+1|=5$ και η ανίσωση $|-2x+1|\geq 5$

Προτεινόμενη λύση

$$|-2x+1|=5 \Leftrightarrow -2x+1=-5 \text{ ή } -2x+1=5$$

$$-2x=-6 \text{ ή } -2x=4$$

$$x=3 \text{ ή } x=-2$$

$$|-2x+1|\geq 5 \Leftrightarrow -2x+1\leq -5 \text{ ή } -2x+1\geq 5$$

$$-2x\leq -6 \text{ ή } -2x\geq 4$$

$$x\geq 3 \text{ ή } x\leq -2$$

$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$$

11.

Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^2 = 9$ και η ανίσωση $(x-1)^2 \leq 9$

Προτεινόμενη λύση

$$(x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x-1 = 3 \quad \text{ή} \quad x-1 = -3$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

$$(x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3$$

$$-3 \leq x-1 \leq 3$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

$$x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow$$

$$x = \alpha \quad \text{ή} \quad x = -\alpha$$

12.

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$. **(1)**

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4. \quad \text{Ρίζες} \quad \rho_{1,2} = \dots\dots\dots = 1 \quad \text{ή} \quad 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Επανάλαβε το
πρόσημο τριωνύμου

$$\text{Η ανίσωση (1)} \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

13.

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 4x + 3 > 0$ **(1)**

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4. \quad \text{Ρίζες} \quad \rho_{1,2} = \dots\dots\dots = 1 \quad \text{ή} \quad 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Επανάλαβε το
πρόσημο τριωνύμου

$$(1) \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

14.

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 10x + 25 > 0$ (3)

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

Ρίζα διπλή $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-10}{2} = 5$

Επανάλαβε το
πρόσημο τριωνύμου

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f(x)	+	0	+

Η ανίσωση $\Leftrightarrow x < 5$ ή $x > 5$, δηλαδή $x \neq 5$

15.

Λύσε τις ανισώσεις **i)** $-x^2 + 4x - 3 < 0$

ii) $x^2 + 8x + 16 > 0$

iii) $-3x^2 + x - 1 < 0$